Став 3.7. *Нека је $\mu : \mathcal{I} \to [0, +\infty]$ функција дефинисана на полуалгебри $\mathcal{I}$ подскупова скупа X са својствима:*

1° $\mu(\emptyset) = 0$.

2° Ако је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, при чему $A_n \in \mathcal{I}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{I}$, онда је $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Тада постоји тачно једна мера $\widehat{\mu}$ на алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ генерисаној полуалгебром $\mathcal{I}$ таква да је $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ за свако A из $\mathcal{I}$.

△ Из 1° и 2° следи коначна адитивност функције μ на $\mathcal{I}$, па се применом става 3.3 добија јединственост $\widehat{\mu}$. Преостаје нам да покажемо да је коначно адитивна мера $\widehat{\mu}$ добијена ставом 3.3 заправо мера. Нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где скупови A и A_n припадају $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Тада те скупове можемо разложити на скупове из полуалгебре $\mathcal{I}$: $A = \bigsqcup_{k=1}^{K} E_k$, $A_n = \bigsqcup_{k_n=1}^{K_n} E_{k_n}^{(n)}$. За свако $k = 1, \ldots, K$ имамо разлагање

$$E_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E_k \cap A_n) = \bigsqcup_{\substack{1 \le n \\ 1 \le k_n \le K_n}} E_k \cap E_{k_n}^{(n)}$$

скупа $E_k \in \mathcal{I}$ на скупове $E_k \cap E_{k_n}^{(n)} \in \mathcal{I}$. Из 2° следи да је

$$\mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \mu(E_k \cap E_{k_n}^{(n)}).$$

Сумирајући претходну једначину по k и имајући у виду да је $E_{k_n}^{(n)} = E \cap E_{k_n}^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{K} E_k \cap E_{k_n}^{(n)}$ добијамо

$$\widehat{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{K} \mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \sum_{k=1}^{K} \mu(E_k \cap E_{k_n}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_n=1}^{K_n} \mu(E_{k_n}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}(A_n),$$

што доказује σ адитивност за $\widehat{\mu}$. □

Да бисмо применили овај став на ситуацију коју разматрамо, фиксирајмо низ $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ основних интервала чија је унија $I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n$ такође основни интервал. Из монотоности и коначне адитивности добијамо

$$m_\alpha(I) \ge m_\alpha\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} I_n\Big) = \sum_{k=1}^{n} m_\alpha(I_k),$$

а како та неједнакост важи за свако n, онда преласком на лимес добијамо

$$m_\alpha(I) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n). \tag{3.5}$$

Обрнута неједнакост очито важи ако је $m_\alpha(I_n) = +\infty$ за неко n, па зато надаље претпостављамо да је $m_\alpha(I_n) < +\infty$ за свако n.